MAT 479 DÖNÜŞÜMLER VE GEOMETRİLER BÜTÜNLEME SINAVI VE CEVAPLARI (23 .01.2025)

Adı Soyadı:
Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) $A(3,3)$ noktasını $A'(1,-5)$ noktasına götüren iki katı hareket bulunuz**(20 P.)**.

Çözüm: Öteleme vektörü $\overrightarrow{AA'} = A' - A = (1,-5) - (3,3) = (-2,-8)$ olan

$$T\ldots\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - 8 \end{cases}$$

ötelemesi

ve

$$I(h,k) = \frac{A + A'}{2} = \frac{(3,3) + (1,-5)}{2} = (2,-1)$$

olmak üzere $I(h,k)$merkezli π dönme açılı

$$R\ldots\begin{cases} x' = xcos\alpha - ysin\alpha + h(1 - cos\alpha) + ksin\alpha \\ y' = xsin\alpha + ycos\alpha k + (1 - cos\alpha) - hsin\alpha \end{cases}$$

den

$$R\ldots\begin{cases} x' = xcos\pi - ysin\pi + 2.(1 - cos\pi) - 1.sin\pi \\ y' = xsin\pi + ycos\pi - 1.(1 - cos\pi) - 2.sin\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow R\ \ldots\begin{cases} x' = & -x + 4 \\ y' = & -y - 2 \end{cases}$$

dönmesi A yı A' ye götüren iki katı harekettir.

2.) $T \ldots \begin{cases} x' = & x \\ y' = & x+y \end{cases}$ dönüşümü veriliyor. Bu dönüşümün $d. \ldots \; -x+y-1=0$ doğrusu üzerindeki uzaklıkları nasıl değiştirdiğini araştırınız**(20 P.)**.

ÇÖZÜM: $P_i(x_i, y_i) \in d, \;\; i = 1{,}2,$ olsun. Bu durumda; $-x_i + y_i - 1 = 0 \Rightarrow y_i = 1 + x_i$ $\;(\blacksquare)$ dir.

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (1 + x_2 - (1 + x_1))^2} \quad \Rightarrow$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} \text{ dir.}$$

$$P_i'(x_i', y_i') = T(P_i) = (x_i \,, x_i + y_i), \;\; i = 1{,}2$$

$$d(P_1', P_2') = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 + y_2 - (x_1 + y_1))^2}$$

$$\Rightarrow d(P_1', P_2') \underbrace{=}_{(\blacksquare)\text{dan}} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 + 1 + x_2 - x_1 - 1 - x_1)^2}$$

$$\Rightarrow d(P_1', P_2') = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (2x_2 - 2x_1)^2} = \sqrt{5(x_2 - x_1)^2}$$

$$\Rightarrow d(P_1', P_2') = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} d(P_1, P_2) = \frac{\sqrt{10}}{2} d(P_1, P_2) \text{ elde edilir.}$$

3.) Dönme merkezi $(0,1)$ ve dönme açısı $3\,\pi/2$ olan bir dönme ile dönme merkezi $(1,0)$ ve dönme açısı $\pi/2$ olan dönüşümlerin verilen sıradaki bileşkelerinin denklemini bulunuz. Bu bileşkenin bir öteleme ya da dönme olup olmadığını araştırınız**(20 P.)**.

Çözüm: $O'(h,k)$ noktası etrafında α açılı bir dönme denkleminin

$$\begin{cases} x' = xcos\alpha - ysin\alpha + a \\ y' = xsin\alpha + ycos\alpha + b \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Burada,

$$\begin{cases} a = h(1 - cos\alpha) + ksin\alpha \\ b = k(1 - cos\alpha) - hsin\alpha \end{cases}$$

dır.

Dönme merkezi $(0,1)$ ve dönme açısı $3\pi/2$ olan değerler yukarıda yerlerine yazılır ise

$$R_1 \ldots \begin{cases} x'' = x' \overbrace{cos\frac{3\pi}{2}}^{0} - y' \overbrace{sin\frac{3\pi}{2}}^{-1} + 0.\left(1 - cos\frac{3\pi}{2}\right) + 1.sin\frac{3\pi}{2} \\ y' = x' \underbrace{sin\frac{3\pi}{2}}_{-1} + y' \underbrace{cos\frac{3\pi}{2}}_{0} + 1.\left(1 - cos\frac{3\pi}{2}\right) - 0.sin\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_1 \ldots \begin{cases} x'' = & y' - 1 \\ y'' = & -x' + 1 \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi $(1,0)$ merkezli ve dönme açısı $\pi/2$ olan dönme denklemini bulalım:

$$R_2 \ldots \begin{cases} x' = xcos\frac{\pi}{2} - ysin\frac{\pi}{2} + 1.\left(1 - cos\frac{\pi}{2}\right) + 0.sin\frac{\pi}{2} \\ y' = xsin\frac{\pi}{2} + ycos\frac{\pi}{2} + 0.\left(1 - cos\frac{\pi}{2}\right) - 1.sin\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_2 \ldots \begin{cases} x' = & -y + 1 \\ y' = & x - 1 \end{cases}$$

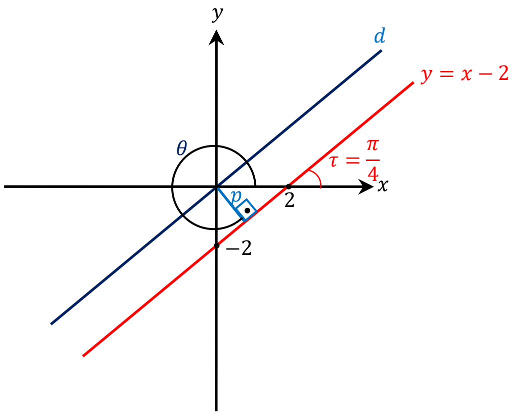
elde edilir.

$$R_1R_2 \ldots \begin{cases} x'' = & x - 1 - 1 \\ y'' = & -(-y + 1) + 1 \end{cases} \Rightarrow R_1R_2 \ldots \begin{cases} x' = & x - 2 \\ y' = & y \end{cases}$$

bulunur. Bu ise R_1R_2 bileşkesinin, öteleme vektörü $(-2, 0)$ olan bir öteleme olduğunu gösterir.

4.) $y = x - 2$ doğrusuna göre yansımanın denklemini bulunuz. Bu yansıma altında $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ geometrik şeklin resmini bulunuz**(50 P.)**.

Çözüm: $y = x - 2 \Rightarrow tan\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{4}$ dir. $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ dir.



Not: (x_0, y_0) noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığı $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ dir.

$x - y - 2 = 0,\ (x_0, y_0) = (0{,}0)$ dan $a = 1, b = -1, c = -2,$

$p = \frac{|1.0+(-1).0-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ dir.

Orijinden geçmeyen herhangi bir doğruya göre yansıma denkleminin

$$R \ \cdots \ \begin{cases} x' = xcos2\tau + ysin2\tau + 2p.cos\theta \\ y' = xsin2\tau - ycos2\tau + 2p.sin\theta \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemde $\tau = \frac{\pi}{4}, p = \sqrt{2}, \theta = \frac{7\pi}{4}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$R \ \cdots \ \begin{cases} x' = y + 2.\sqrt{2}.\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\ y' = x + 2.\sqrt{2}.\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \Rightarrow R \ \cdots \ \begin{cases} x' = y + 2 \\ y' = x - 2 \end{cases} \Rightarrow R^{-1} \ \cdots \ \begin{cases} x = y' + 2 \\ y = x' - 2 \end{cases}$$

bulunur.

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 1 \Rightarrow (y' + 2 - 4)^2 + (x' - 2 - 2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x' - 4)^2 + (y' - 2)^2 = 1$$

Not: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 1$ çemberinin merkezi olan $(4{,}2)$ noktası $y = x - 2$ doğrusu üzerinde olduğundan bu çemberin resmi kendisidir.

5.) $\quad T \ldots \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases}$

ötelemesi altında $y^2 + 2y - x = 0$ eğrisinin resmini bulunuz ve her iki eğrinin grafiğini çiziniz.

T ötelemesinin geometrik yorumunu yapınız **(20 P.)**.

Çözüm:

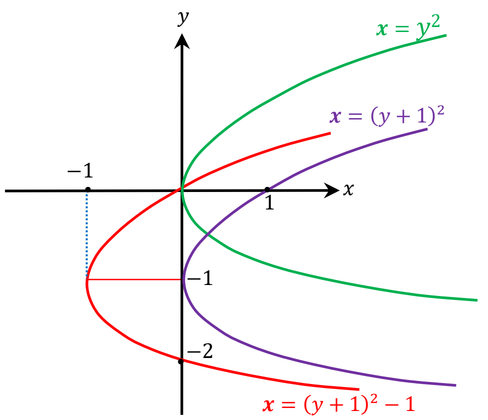
$$T \ldots \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 3 \end{cases} \Rightarrow \; T^{-1} \ldots \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 3 \end{cases}$$

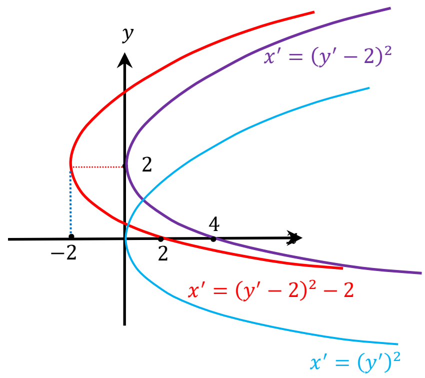
dir.

$y^2 + 2y - x = 0 \Rightarrow x = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$ parabolünde x ve y değerlerini yerlerine yazarsak

$$(y'-3)^2 + 2(y'-3) - (x'+1) = 0 \Rightarrow y'^2 - 6y' + 9 + 2y' - 6 - x' - 1 = 0$$
$$\Rightarrow x' = y'^2 - 4y' + 2 = (y'-2)^2 - 2$$

parabolü elde edilir. Buna göre, esas eğri ile T ötelemesi altında elde edilen parabollerin grafikleri aşağıdaki gibidir:





T ötelemesi $x = y^2 + 2y$ parabolünü x −ekseni doğrultusunda 1 −birim sola ve y −ekseni doğrultusunda 3 −birim yukarıya ötelemiştir.

Açıklama: $x = y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$ parabolünü çizmek için aşağıdaki adımlar takip edilmelidir:

$i)$ Önce $x = y^2$ parabolü çizilir.

$ii)$ $x = y^2$ parabolü y −ekseni doğrultusunda 1 birim aşağı kaydırılarak $x = (y+1)^2$ parabolü çizilir.

$iii)$ $x = (y+1)^2$ parabolü x −ekseni doğrultusunda 1 birim sola kaydırılarak $x = (y+1)^2 - 1$ parabolü çizilir.

<u>NOT</u>: Sorular eşit puanlı olup, süre 90 dakikadır. Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR